# Die erste Statik der Welt vor 260 Jahren[1]

Wilfried Wapenhans
Jens Richter

## Zusammenfassung

Vor 260 Jahren wurde in Rom von den drei Mathematikprofessoren Ruggiero Giuseppe Boscovich (1711-1787), Tommaso Le Seur (1703-1770), Francesco Jacquier (1711-1788) ein Gutachten erarbeitet, das sie den Titel gaben:

> *„Die Ansicht von drei Mathematikern zu den Schäden, die an der Kuppel des Petersdoms Ende Anno MDCCXLII festgestellt wurden. Erarbeitet im Auftrag unseres Herrn Papst Benedikt XIV“* [1]

Dieses in Altitalienisch verfasste Gutachten erschien im März 1743 als gedrucktes Manuskript und kann als erste Statik der Welt bezeichnet werden. Die Aufgabe wurde von den drei Mathematikern mit dem Wissen der damaligen Zeit gelöst, auch wenn aus heutiger Sicht Einschränkungen erforderlich sind. Diese werden diskutiert.

## 1 Die erste Statik der Welt?

Das klingt spektakulär und erinnert an die Schlagzeilen der Boulevardpresse. Hans Straub formuliert es deshalb in seiner „Geschichte der Bauingenieurkunst“ [2] viel zutreffender, aber weniger einprägsam, als den *„Übergang vom handwerklich-gewohnheitsmäßigen Schaffen zur modernen, wissenschaftlich fundierten Bauingenieurkunst“*.

Kurzum: Man muss die Tragwerksplanung als einen langen, auch heute noch nicht abgeschlossenen Entwicklungsprozess begreifen, der in der „ersten Statik“ quasi einen impulsauslösenden Zeugungsakt fand.

Tatsächlich finden sich in der „ersten Statik“ bereits Hinweise auf andere statische Untersuchungen. Allerdings dürfte die Anwendung der Mechanik und statischen Prinzipien, die zu diesem Zeitpunkt ausschließlich von den Mathematikern als Teilgebiet der Mathematik gepflegt und entwickelt wurden, auf ein derart bedeutendes und komplexes Bauwerk so ungewöhnlich, neu und damit disputfördernd gewesen sein, dass man die Vereinfachung – von der ersten Statik zu reden - zubilligen sollte. Unabhängig davon ist aber auch der Aspekt hervorhebenswert, dass es eben 3 Mathematikprofessoren und keine Baumeister waren, die die „erste Statik“ erarbeiteten.

Es kommt ja auch noch ein weiterer Aspekt hinzu, der noch viel schwerer wiegt. Bezeichnender Weise wurde die Statik nicht dazu benutzt, ein Bauwerk – wie bei einer Projektierung – vorauszudenken, d.h. für die zu erwartenden Beanspruchungen zu bemessen, sondern im Fall der „ersten Statik“ wurde die Berechnung zur Überprüfung der Standsicherheit und zur Begründung für die verbal beschriebenen Ursachen benutzt. D.h. die drei Mathematiker schufen ein – wörtlich *„System“* – (man meinte damit eine Idealisierung, d.h. eine mit den Mitteln der Statik geschaffene angenäherte Abbildung der Wirklichkeit), das in der Lage sein sollte, die Wirklichkeit in den wesentlichsten Punkten widerzuspiegeln.

Gleichzeitig folgte man mit konsequenter Logik den Anforderungen der gutachterlichen Arbeit, eben ein bereits vorhandenes Bauwerk nach - und nicht vor - seiner Errichtung zu erläutern. Dieser bisher wenig beachtete Gesichtspunkt der Gutachtenbearbeitung ist aber

---

[1] Basierend auf der Festschrift der Verfasser [3], die im Internet in voller Länge veröffentlicht wurde: www.wundr.com Rubrik: Infos ⇒ Fachaufsätze ⇒ Erste Statik

ein zweiter wesentlicher Schwerpunkt, der ebenfalls nicht unter der Überschrift „erste Statik“ Platz findet.

Es ist auch zu überlegen, ob man deshalb nicht besser „erstes Gutachten“ schreiben sollte. Aber dieser Titel ist wohl auch schon vergeben. Nämlich an den Bericht aus der griechischen Mythologie, dass der schöne Jüngling Paris den Streit zwischen den Göttinnen Hera, Athene und Aphrodite entscheiden sollte, wer die Schönste von ihnen sei. Heute würde man Schiedsgutachten dazu sagen und die Bestechung der Aphrodite verurteilen, die Paris eine ganz besondere Belohnung für ihre Wahl, nämlich die schöne Helena versprach. Man darf aber sicherlich sagen, dass die „erste Statik“ auch gleichzeitig ein Baugutachten ist, das auch von heutigen Baugutachtern mit großem Gewinn gelesen werden kann.

Allerdings wird man nur dann Gewinn daraus ziehen, wenn man eine möglicherweise vorhandene innere Überheblichkeit ablegt, die auf den erheblichen Wissenszuwachs und auf unsere heutigen Computertechnologien baut: Trotzdem wir uns mit den modernen Mitteln der Tragwerksplanung ausgerüstet in die Gedankenwelt der drei Professoren der „ersten Statik“ begeben, so gibt es keinen Grund sich haushoch überlegen zu fühlen. Die Aufgabenstellung, eine Erklärung für die Schäden an der Kuppel und Vorschläge zur Instandsetzung zu finden, ist gigantisch und selbst mit unserem heutigen Bauingenieurwissen und unseren erheblichen Ressourcen der Hard- und Software stoßen wir ganz leicht an unsere Grenzen.

## 2 Originaltext und Übersetzung

Der Originaltext und dessen Übersetzung wurden in [3] für die Gourmets unter den geschichtlich interessierten Statikern zubereitet. Im Rahmen eines Aufsatzes muss darauf verwiesen werden, da der Originaltext 36 Seiten A4 zuzüglich die gleiche Anzahl für die deutsche Übersetzung umfasst. Ebenso sind bereits Abbildungen der drei Mathematiker in [4] (schwarz-weiß Abbildung eines Gemäldes mit Le Seur und Jacquier) und [5] (wie [4] und Kupferstich von Boscovich) veröffentlicht worden, die originalgetreu auf unserer Internetseite www.wundr.com zu finden sind.

Bisher noch nicht allgemein bekannte Abbildungen vom wohl federführenden Boscovich finden sich auf einen Golddukaten und einer Banknote (nur bis 1994 gültiges Zahlungsmittel), die beide von der Kroatischen Nationalbank herausgegeben wurden:

Bild 1 a): Golddukten (Durchmesser 10 mm)

Bild 1 b): Abbildung auf der Internetseite der Kroatischen Nationalbank


Bild 1c): Abbildung von Boscovich auf einen 25-Dinar-Schein, der zwischen 1991 bis 1994 gültiges Zahlungsmittel war (identische, aber auf dem Golddukaten nur schwer erkennbare Abbildung)

Eine Story für sich ist die Beschaffung des Originaltextes zu DDR-Zeiten aus der päpstlichen Bibliothek in Rom, die in [3] dargestellt wurde. Artist dieses Kunststücks war

Herr Dr.-Ing. Rolf-Herbert Krüger aus Berlin, der seine liebe Not hatte, die erforderlichen 13.500 Lira (etwa 10 €) für die Kopierkosten aufzutreiben.

Das Originalgutachten wurde von den drei Mathematikern in Altitalienisch verfasst und bereits 1989 von der früheren DDR-Firma „Intertext" ins Deutsche übersetzt. Der Name des Übersetzers ist nicht bekannt. Von Kritikern erhielt die in [3] abgedruckte Übersetzung Lob, da diese ordentliche Vorarbeit bereits ein wesentlicher Schlüssel dafür ist, dass sich dem sachkundigen Leser der Text auch erschließt.

Einen weiteren Schlüssel benötigt man aber auch zu den heute nicht mehr gebräuchlichen Maßeinheiten für Längen und Massen. Wenn im Text von der Längeneinheit *Spanne* geredet wird, so entspricht das einem *Bau Palmo* = 12 *Once* = 60 *Minuti* = 120 *Decimi*, die mit 223,19 mm gleichzusetzen sind. Für die Masse ist die Rede von 1 *römischen Libbra* = 12 *Uncen* = 480 *Denari* = 6910 *Grani*, die 339,145 g entsprechen. Dabei sollte die *Once* als Längeneinheit nicht mit der *Unce* als Gewichtseinheit verwechselt werden.

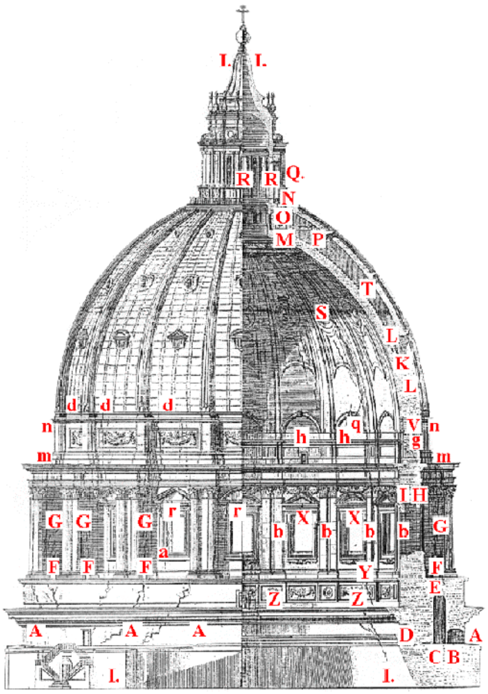

Bild 2: Peterskuppel als Außenansicht links und als Schnitt durch die Kuppel rechts

Zur Orientierung für die verschiedenen Bauteile der Kuppel wurden von den drei Mathematikern in der ersten Statik [1] die damals gängigen Fachbezeichnungen verwendet [3] Teil 2 S. 18. Aber diese Art der Ortskennzeichnung ist zu grob, um sich wirklich punktgenau orientieren zu können. Aus diesem Grund wurde von den drei Mathematikern in der ersten Statik eine maßstäbliche Skizze der Kuppel mit kleinen und großen Buchstabenbezeichnungen beigefügt, die allerdings wegen der eingeschränkten Erkennbarkeit mit Bild 2 nachgearbeitet wurde (vgl. dazu auch [1]).

Mit diesem Wissen ist es möglich, den übersetzten Originaltext der ersten Statik verstehend zu verfolgen. Er ist ohne jede Untergliederung durch Überschriften oder Abschnitte fortlaufend geschrieben, was ihn zwar unübersichtlich macht, aber seiner zwingenden inhaltlichen Logik keinen Abbruch tut.

Aus diesem Grund wurde in [3] Teil 1 eine Gliederung durch Überschriften und Unterabschnitte erfunden, die die klare gedankliche Strukturierung erkennen und auch aus heutiger Sicht keine Wünsche offen lässt.

Die drei Mathematiker huldigen als erstes ihrem Auftraggeber, der anlässlich der erheblichen Schäden infolge Rissbildungen an der Kuppel die Aufgabe stellte, sowohl die Ursachen für diese Schäden, als auch die erforderlichen Instandsetzungsmaßnahmen anzugeben. Es folgt dann die Begründung für die Anwendung der Mechanik zur Ermittlung der Ursachen der Schäden, die nachfolgend wörtlich zitiert werden soll, da sie quasi als Ausgangspunkt zur Erarbeitung der ersten Statik angesehen werden kann:

> *„Vielleicht werden wir uns auch bei allen jenen entschuldigen müssen, die nicht nur die Praxis der Theorie vorziehen, sondern jene allein für notwendig und angebracht halten und diese vielleicht sogar als gefährlich betrachten und die unsere Vermessenheit verurteilen werden, so wie man jemanden verurteilt, der ernten will, was ein anderer gesät hat: Man könnte darauf ohne weiteres erwidern, indem man beweist, dass Theorien, sofern sie richtig angewendet werden, nicht nur nützlich sind, sondern notwendig, dass die Praxis an sich durch nichts anderes nützlich ist, als durch jene Theorien, die aus sich selbst heraus entstehen, denn jemand, der in vielen Fällen gesehen hat, was geschieht, folgert aus diesen Beobachtungen aufgrund seiner natürlichen Einsicht, was in anderen Fällen, die teilweise oder auch ganz anders gelagert sein können, notwendigerweise zu geschehen hat. Doch unsere eigentliche Rechtfertigung ist der Fürst selbst, der uns beauftragt hat und der, mit seinem tiefen und durchdringenden Verstand, mit dem er alle Dinge begreift, klar erkannt hat, dass dies im Grunde eine jener Angelegenheiten ist, bei der, mehr als die Praxis, die Lehren der Mathematik gefordert sind, handelt es sich doch hier um ein Bauwerk, dem kein anderes auf der Erden gleicht, wobei es aber eine kleine Anzahl weniger bedeutender Bauwerke seiner Art gibt, so dass nichts anderes übrig bleibt, als sich auf die langjährigen Erfahrungen mit diesen Bauwerken zu stützen und daraus jene speziellen Prinzipien abzuleiten, auf die die reinen Praktiker ihre Theorien zu stützen pflegen; auf diese Weise kann man mit Sicherheit zu Werke gehen, ohne die allgemeineren Prinzipien zu Rate ziehen zu müssen, die auf der von den heutigen Mathematikern gepflegten Mechanik beruhen, um die kompliziertesten Wirkungen aus einfachsten und allgemeinsten Ursachen abzuleiten...“*

Es folgt eine Istzustandsbeschreibung sowohl der Tragkonstruktion als auch der erkennbaren Bauschäden der Kuppel, die unter Berücksichtigung ihres zeitlichen Verlaufes in Auswertung von Vorgutachten erörtert werden. Die Analyse der Rissursachen gipfelt in der Antithese, dass die Bauschäden nicht auf Setzungen zurückzuführen sind, weil das Rissbild und andere Charakteristika dem widersprechen. Diese richtige und klare Aussage muss auch aus heutiger Sicht Respekt abfordern, da solche Einsichten ein tieferes Verständnis für die Bauwerksreaktionen zeigen. Schließlich kann aus dieser richtigen Antithese auch die richtige These abgeleitet werden, dass die Bauschäden auf eine unzureichende Horizontalkraftaufnahme am Kämpfer der Kuppel zurückgeführt werden muss.

Der analytische Kern der ersten Statik reduziert sich auf 10 Seiten beginnend mit Seite XXV des Originaltextes. Es ist das, was der erste Statik ihr Schwergewicht verleiht, so dass darauf nachfolgend detailliert eingegangen werden soll.

Dieser ersten statischen Berechnung, die als Plausibilitätsnachweis geführt wurde, schließen sich Instandsetzungsvorschläge an, die im wesentlichen zusätzliche Eisenringe vorsehen und in [3] Teil 2 zu Pkt. 7 bewertet wurden. Darauf soll nur verwiesen werden.

# 3 Die erste statische Berechnung

## 3.1 Lastannahmen (vgl. S. XXV des Originaltextes)

Die Massen für einzelne Teile der Kuppel wurden von den drei Mathematikern genau ermittelt, jedoch werden die angegebenen Teile und deren Massen für Basis und Tambour mit Säulenfuß durch die Rissbildungen getrennt und in der Gleichgewichtsbetrachtung der drei Mathematiker auch als Einzelteile angesetzt. Für diese Einzelteile sind die Teilmassen und angenommenen Abmessungen nicht dargestellt, so dass hier eine Ungewissheit im Vergleich der Ansätze vorliegt.

Die angegebenen Gewichte lassen sich, bis auf die kleine Kuppel, einfach auf Plausibilität prüfen:

- **große Kuppel**: angenommen ½ - Kugel mit 97 Spannen mittlerem Radius, einer mittleren Wandstärke von 16 Spannen und dem Gewicht von Mauerwerk. G ≈ 50 * 16 * 0,5 * ® * (2 * 97)$^{2}$ * 1$^{-6}$ ≈ 47,3 Mio. Libre. Das stimmt mit den angegebenen 50,1 Mio. Libre ausreichend genau überein.
- **Tambour mit attischem Säulenfuß**: Höhe 85 Spannen, Dicke 14 bis 15 Spannen, mittlerer Durchmesser 194 Spannen, mittleres Gewicht geschätzt aus 20% Travertin und 80 % Mauerwerk mit 55 Libre/Kubikspanne, abzüglich 16 Fenster von ca.12 Spannen Breite und 20 Spannen Höhe
  G ≈ 55 * (85 * 14,5 * ® * 194 – 16 * 12 * 20 * 14) * 1$^{-6}$ ≈ 38,4 Mio. Libre. Das sind rund 10 Mio. Libre weniger als angegeben, nämlich 48,01 Mio. Libre. Da die anderen Zahlen besser übereinstimmen, könnte ein **Fehler** der drei Mathematiker vorliegen, der nur durch genauere Untersuchung zu klären ist. Diese genauere Untersuchung wird im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht geleistet.
- **Strebepfeiler**: hier sind die Bauteilabmessungen aus der Zeichnung nur schlecht abzuschätzen. Als Baustoff wird Travertin angesetzt.
  G ≈ 16 * 72 * 63 * 17 * 10$^{-6}$ ≈ 12,3 Mio. Libre. Das stimmt mit den angegebenen 13,3 Mio. Libre ausreichend genau überein.
- **Basis**: Höhe 40 Spannen, Breite 38 Spannen, zwei Gesimsbänder mit 7*7 Spannen, abzüglich des Ganges mit 8*27 Spannen, mittlerer Radius 109 Spannen, Gewicht für Mauerwerk mit 20 % Travertin.
  G ≈ 55 * (38 * 40 + 7 * 7 – 8 * 27) * 2 * ® * 109 * 1$^{-6}$ ≈ 50,9 Mio. Libre, das stimmt mit den angegebenen 50,0 Mio. Libre gut überein.

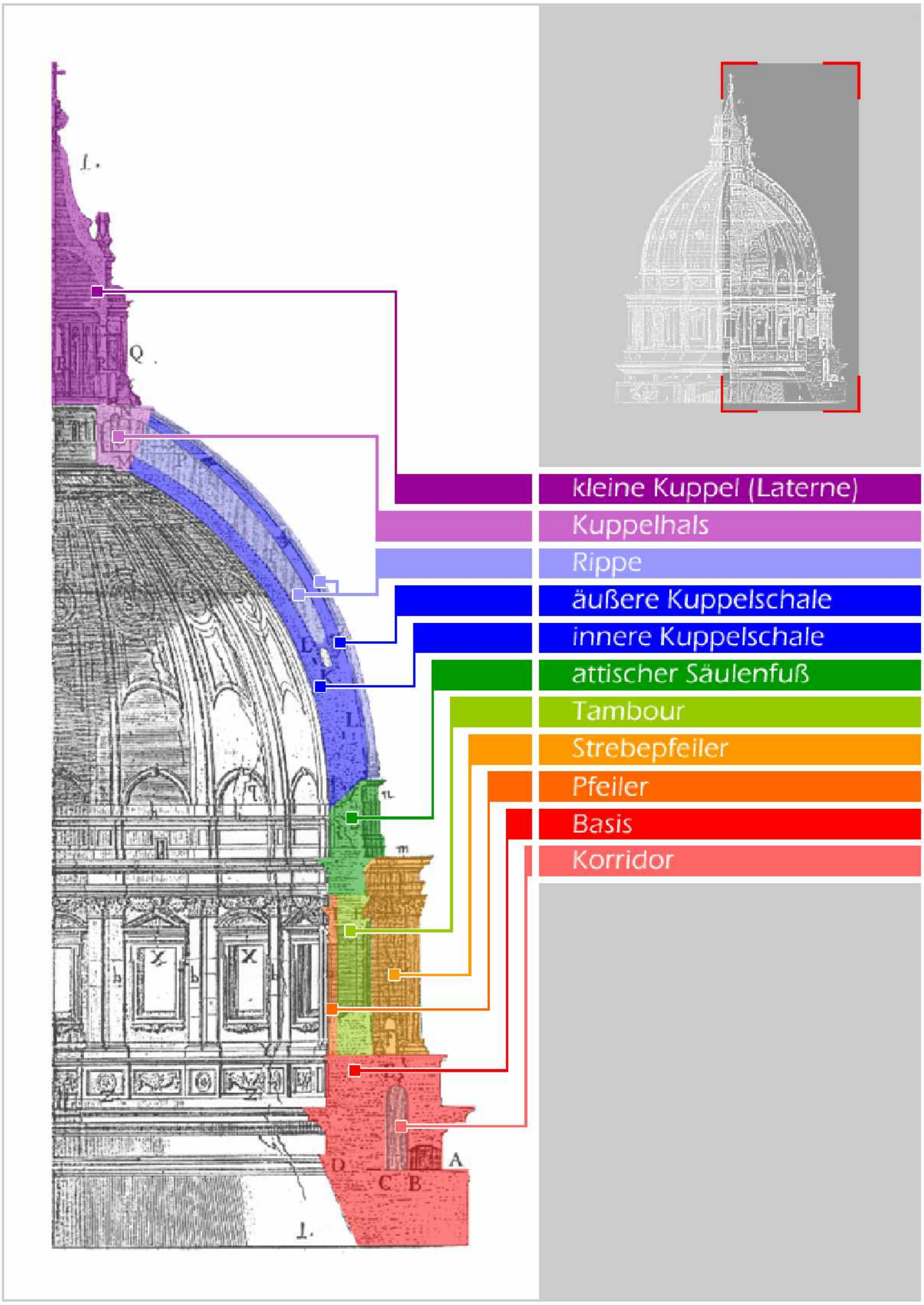


Bild 3: Bauteilbezeichnungen der Peterskuppel

## 3.2 Zugkraft der Eisenketten (vgl. Seite XXV des Originaltextes)

Mit dem Verweis auf die Zugbruchversuche von MUSSCHENBROEK wird durch die drei Mathematiker unterstellt, dass es keinerlei Unterschiede in der Zugbruchfestigkeit des Eisendrahts von MUSSCHENBROEK gegenüber den Ketten der Kuppel gebe, so dass damit die Zugbruchfestigkeit der bereits seit über 100 Jahren in die Kuppel von Michelangelo eingebauten Eisenketten mit derjenigen des von MUSSCHENBROEK untersuchten Eisendrahtes gleichgesetzt wird.

Aus heutiger Sicht ist das eine nicht zu akzeptierende Gleichsetzung, wobei man auch heute das Problem hätte, wie man denn die Festigkeitseigenschaften der eingebauten Eisenketten bestimmen sollte. Bei einem Ausbau ohne weitere Sicherungsmaßnahmen würde man den Einsturz riskieren. Aus diesem Grund muss man diesen Festigkeitsansatz als Schätzung mit nicht eingrenzbarer Schwankungsbreite charakterisieren.

Dabei wäre als weiteres wesentliches Problem auch noch der Einfluss von statistischen Überlegungen als wahrscheinlichkeitstheoretische Prognoseaussagen einzubeziehen, die mit diesen Bemerkungen noch nicht einmal ansatzweise berücksichtigt wurden. Auch bei den nachfolgenden Bewertungen werden solche Überlegungen nicht weitergeführt, weil es nicht darum geht, die gesamte Berechnung der drei Mathematiker grundlegend zu reformieren, sondern das Spannungsfeld der gewählten Ansätze aus heutiger Sicht aufzuzeigen.

Ein drittes Problem eröffnet sich hierbei im Ansatz der Zugbruchfestigkeit, die vom heutigen Sicherheitskonzept des Stahlbaus völlig abweicht, da nicht gegen die Bruch-, sondern gegen die Streckgrenze (bei heutigem Baustahl grob gerundet etwa 2/3 der Bruchgrenze) abgesichert wird. Dabei sind auch noch keine Aspekte heutiger Sicherheitsphilosophie berücksichtigt.

Die in diesem Abschnitt der „ersten Statik“ dargestellten Umrechnungen der drei Mathematiker sind verwirrend und nicht eindeutig nachvollziehbar. Das betrifft insbesondere die Umrechnung vom Rheinischen Fuß in die Römische Spanne (Palmo), da die tatsächlich vorgenommene Einteilung des Rheinischen Fußes in Zoll von den drei Mathematikern nicht angegeben wird. Deshalb unterscheiden sich die nachfolgenden beiden Vergleichsrechnungen im Ansatz darin, dass zum einen der Rheinische Fuß (= Rheinländische Fuß) in einer Unterteilung mit 12 Zoll und zum anderen mit 10 Zoll angesetzt wird:

a) Nach den vorgenommenen Recherchen [8], [9] wäre es korrekt, den Rheinischen Fuß in 12 Zoll zu unterteilen, was nachfolgende Berechnung ergibt:

$$\frac{1 Fuß}{1218} \equiv \frac{1 Palmo}{886} \equiv \frac{12 Zoll}{1218} \equiv \frac{12 Once}{886}$$

$\Rightarrow$ 1/10 Zoll = $\frac{121{,}8 Once}{886}$ = **0,13747 Once**

Ein Draht mit einem Durchmesser von einem Zehntel Zoll hat eine Fläche von

$A_{Draht} = \frac{\Pi}{4}$ * (0,13747 Once)² = 0,0148428 Once²

Damit beträgt die Ringkraft mit einer Fläche von 12 Once²:

$$F = 600 \; \frac{12}{0{,}0148428} = 485.082 \text{ Libre} > 336.863 \text{ Libre (gemäß Angabe im Text)}$$

b) Nimmt man nunmehr den Rheinischen Fuß in 10 Zoll unterteilt an, so ergibt sich analog

$$\frac{10 Zoll}{1218} \equiv \frac{12 Once}{886}$$

$$\Rightarrow 1/10 \text{ Zoll} = \frac{121{,}8 * 1{,}2 Once}{886} = \mathbf{0{,}164966\ Once}$$

Ein Draht mit einem Durchmesser von einem Zehntel Zoll hat eine Fläche von

$$A_{Draht} = \frac{\Pi}{4} * (0{,}164966 \text{ Once})^2 = 0{,}0213737 \text{ Once}^2$$

Damit beträgt die Ringkraft mit einer Fläche von 12 Once²:

$$F = 600 \; \frac{12}{0{,}0213737} = 336.863 \text{ Libre} = 336.863 \text{ Libre (gemäß Angabe im Text)}$$

Auswertung der Vergleichsrechnungen:

Aus den vorstehenden Vergleichsrechnungen ist abzuleiten, dass zwar mit der unter b) getroffenen Annahme in hervorragender Übereinstimmung die numerisch gleiche Zahlenangabe wie im Gutachten der drei Mathematiker erreicht wird, jedoch die Umrechnungsannahme unter b) wegen der fehlerhaften Einteilung des Rheinischen Fußes in 10 Zoll falsch ist. Der Rheinische Fuß ist richtig in 12 Zoll zu unterteilen.

Aus der Literatur (aber auch noch andere wie beispielsweise Meyers Neues Lexikon von 1974) ist nicht erkennbar, dass es auch noch eine andere Umrechnung mit 10 Zoll für den Rheinischen Fuß gegeben haben könnte, so dass keine Interpretation eine Alternative bietet, nicht auf einen Umrechnungsfehler der drei Mathematiker zu schließen. Deshalb ist zu schlussfolgern, dass die vorgenommene Umrechnung der drei Mathematiker nicht korrekt ist.

⇒ Ermittlung der Zugbruchfestigkeit des Eisendrahtes mit dem korrekten Ansatz nach a):

$$A = \frac{\Pi}{4} * 0{,}13747^2 = 0{,}0148428 \text{ Once}^2 = 0{,}0148428 * (18{,}6 \text{ mm})^2 = 5{,}14 \text{ mm}^2$$

$$F = 600 \text{ Libre} \equiv 600 * 339{,}15 \; 10^{-2} = 2035 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \sigma_{Bruch} = \frac{2035}{5{,}14} = 396 \text{ N/mm}^2$$

Diese Spannung von 396 N/mm² wird nach den vorstehenden Umrechnungen nach a) als Zugbruchspannung des Eisendrahtes im Experiment von MUSSCHENBROEK erreicht. Das entspricht quasi der Zugbruchspannung unseres heutigen St 37 (S 235), deren Schwankungsbereich mit 340 bis 470 N/mm² angegeben wird. Dabei ist tendenziell in Erwägung zu ziehen, dass kleinere Materialdicken höhere Zugbruchspannungen erreichen als größere.

Ungewollt wird mit der fehlerhaften Berechnung der Kraft für die Eisenketten mit 336.863 Libre gegenüber den mit der korrekten Umrechnung ermittelten 485.082 Libre eine zusätzliche Sicherheitsreserve von rund

$$(1 - \frac{336.863}{485.082}) * 100 \approx 30\ \%$$

gegenüber der Zugbruchkraft erzeugt, was mit 0,7 * 396 N/mm² = 277 N/mm² ungefähr der Fließspannung des Eisens entsprechen könnte. Mit diesem Umrechnungsfehler der drei Mathematiker könnte man davon sprechen, dass quasi eine Absicherung gegenüber der Fließspannung des Eisens erfolgte, so wie es im heutigen Sicherheitskonzept vorgesehen ist.

Apropos Sicherheitskonzept: Glücklicherweise erschien zu dem Anlass des 250. Jahrestages der Aufsatz von CONRAD und HÄNSEROTH [4]. Allerdings wurde in [4] nur der Zeitpunkt der Erarbeitung der „ersten Statik“ als Aufhänger dafür benutzt, die Vorgeschichte darzustellen, die schließlich zur „ersten Statik“ führte. Trotz dieser verdienstvollen Arbeit muss zu [4] eine Einschränkung gemacht werden, die bitte nicht als gehässige Krittelei zu verstehen, sondern der historischen Wahrheit geschuldet ist. Zum ermittelten Fehlbetrag der drei Mathematiker auf der Widerstandsseite heißt es in [4]:

> *„...Das Defizit ... empfahlen die Gutachter durch Anlegen zusätzlicher Stahlanker um die Kuppel herum zu decken.“*

Das ist richtig, wenn man unter dem etwas irreführenden Begriff „Stahlanker“ die Eisenketten versteht! Aber weiter heißt es dann:

> *„Bei der Dimensionierung der Anker griffen sie auf Ergebnisse von Materialversuchen zurück und führten einen Sicherheitsbeiwert in die Rechnung ein...“*

Und das ist im zweiten Teil des Satzes nicht mehr richtig. Tatsächlich wurde auf Materialversuche anderer zurückgegriffen ([3] Teil 1 S. 51 bzw. XXV.) und tatsächlich wurde auch ein Sicherheitsfaktor von 2 ([3] Teil 1 S. 63 bzw. XXXI.) empfohlen, aber der für die Instandsetzung empfohlene *„zusätzliche Stahlanker“* wurde von den drei Mathematikern mit einer Fläche von 5 * 3,3 = 16,5 Once² gerade so dimensioniert, dass er rein rechnerisch etwa den ermittelten defizitären Horizontalschub ausglich ([3] Teil 1 S. 63 bzw. XXXI.). Und zwar **ohne** Sicherheitsfaktor ([3]. Teil 2 Zu 6.2 b), sowie 6.3):

$$F = 600\ \frac{16{,}5}{0{,}0213737}\ 2\,\Pi = 463.186 * 2\,\Pi = \mathbf{2.910.284\ Libre} \approx \mathbf{3.174.857\ Libre}$$

Möglicherweise erhoffte man sich mit der Anordnung der weiteren Eisenketten, die jedoch statisch wesentlich weniger wirksam angeordnet wurden, eine Anhebung des Widerstandes auf einen Sicherheitsfaktor von 2, jedoch ist das wegen völlig fehlender weiterer Dimensionierungen und wegen des Fehlens jeglichen Hinweises in der „ersten Statik“ dazu nicht mehr rekonstruierbar und deshalb Spekulation.

Leider werden in der Literatur wie in [6] und jüngst erst in [7] immer wieder die unzutreffenden Überlegungen von POLENI in seinem Gutachten von 1748 [8] kommentarlos dargestellt, dass durch das passgenaue Einlassen der Eisenketten in das Mauerwerk bei einem Bruch der Eisenkette eine zusätzliche Sicherheitsreserve aktiviert werden könnte. Der Fehler dieser Überlegung POLENIS liegt darin, dass die Eisenketten beim Einbau spannungslos sind und erst mit der Dehnung und dann beim Aufreißen der Kuppel die ihnen zugedachten Kräfte erhalten. Ist durch ausreichend dimensionierte und angeordnete Eisenketten das Gleichgewicht der Kräfte sichergestellt, so können die Risse in der Kuppel wieder geschlossen werden, ohne dass weitere wesentliche Rissaufweitungen mehr befürchtet werden müssen. Heute weiß man, dass man diesen Erscheinungen durch Vorspannung der Ketten – heute würde man wohl Stahlseile nehmen – vorbeugen kann. Das Stahlseil wurde allerdings erst etwa 100 Jahre nach POLENI erfunden und war deshalb keine Option ([3] Teil 2 S. 18/19).

Im weiteren wird von den drei Mathematikern [1] auf Seite XXVI des Originaltextes über den Überlegungsansatz des Vergleichs eines Kreises mit einem Stab die Gesamtkraft der Eisenkette angegeben. Ohne Kenntnis der Elastizitätstheorie (und den Gesetzen der Hydrostatik) wird über eine virtuelle Verschiebung die Bruchkraft im Kettenring für eine Last, die gleichmäßig nach außen wirkt, genannt (Herleitung siehe [3] Teil 2 S.6/7).

$\Rightarrow \mathbf{P_{Kreis} = P_{Bruch} * 2\,\Pi}$

Trotzdem diese Grundüberlegung prinzipiell korrekt ist, so korrespondiert sie jedoch nicht unbedingt mit den Verträglichkeitsbedingungen, die bei einer genaueren Nachweisführung zu berücksichtigen sind. In der Generalisierung dieses Ansatzes der drei Mathematiker liegt deshalb aus heutiger Sicht ein schwerwiegender Mangel.

## 3.3 Das Nachweiskonzept: Das Prinzip der virtuellen Verrückungen (vgl. Seite XXVII des Originaltextes)

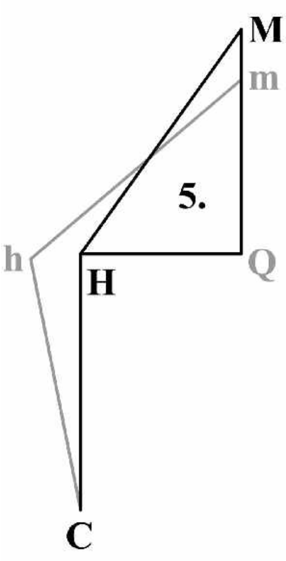


Bild 4: Abbildung 5 im Originaltext

Die in der Abbildung 5 des Originals dargestellte Prinzipskizze ist keinem der tatsächlich zum Ansatz gebrachten Berechnungen direkt zuordenbar. Mit dieser Skizze wird deshalb tatsächlich nur das Prinzip ohne weitere Spezifikationen beschrieben.

Das Prinzip, nach dem die Berechnung erfolgte, wurde von den drei Mathematikern erklärt, die Zahlenrechnung und die hierzu notwendigen Ansätze jedoch nicht offengelegt. Jeder, der diese Berechnung nachvollziehen möchte, hat damit das Problem, in die Kuppelgeometrie ein System hineinzulegen, das den ursprünglich getroffenen Annahmen zumindest näherungsweise entsprechen muss, um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten.

Die zeichnerische Darstellung der Kuppel ist nach den damaligen Gepflogenheiten sicher mit hoher Genauigkeit und Detailtreue erfolgt, jedoch ohne Maßangaben. Im Text sind die Hauptabmessungen beschrieben, so dass einige Abmessungen zu Kontrollzwecken in die Schnittzeichnung eingetragen werden können. Die Lage der Zugringe als Eisenketten ist zwar beschrieben, aber nicht dargestellt und damit nur ungenau nachzuvollziehen.

Die prinzipielle Vorgehensweise der drei Mathematiker für die Rechnung ist in [2] S. 158 mit den heute in der technischen Mechanik üblichen Begriffen erläutert, indem es dort heißt:

> *„Im Einzelnen ist der Gang der Rechnung also ungefähr der folgende: Das Gewicht der Laterne und der Kuppel übt auf den Kämpferring einen totalen, auf den ganzen Umfang verteilten Schub H =* $\sum_{(i)} G_i \frac{v_i}{h_i}$ *aus, wenn mit* $G_i$ *die Gewichte (i = 1, 2...) und mit* $v_i/h_i$ *für die einzelnen Massen (Laterne und Kuppel) das Verhältnis der Senkung* $v_i$ *des jeweiligen Schwerpunktes zur entsprechenden Horizontalverschiebung* $h_i$ *des Kämpfers bezeichnet werden. Der dem Schub H entgegenwirkende Widerstand W setzt sich zusammen einerseits aus dem aus analoge Weise ermittelten Widerstand der Massen des Tambours und der Strebepfeiler gegen Kippen, andererseits aus dem Widerstand der vorhandenen Eisenringe; er wird aus ihrem Querschnitt und der dem Werk von* MUSSCHENBROEK *... entnommenen Bruchfestigkeit des Eisens ... berechnet. Dabei werden die Höhenlage der Ringe und die Beziehung zwischen dem Radialdruck* $p_r$ *und der Längszugkraft Z im Ring berücksichtigt (*$Z = p_r = H / 2\,\Pi$*). Als Fehlbetrag an Horizontalwiderstand auf Kämpferhöhe werden 3 237 356 römische Pfund (etwa 1100 t) ermittelt...“*

## 3.4 Einfachheit der Zahlenrechnung (vgl. Seite XXVIII des Originaltextes)

Über die Zeit nach der „ersten Statik“ wird beispielsweise in [2] S. 161 ff darüber berichtet, dass es einen Jahrhunderte langen Streit darüber gegeben habe, ob man die Mathematik (hier sind die mechanischen und statischen Prinzipien gemeint) auf reale Tragwerke anwenden dürfe. Die drei Mathematiker haben daran nicht wenig Schuld, denn hätten sie sich nicht entschlossen, die Zahlenrechnung als „einfach“ abzutun, so wäre aus dem ausgeführten praktischem Beispiel auch das für die Beurteilung so notwendige Verständnis entsprungen.

Diese Chance wurde leider vertan, denn selbst wenn man in den folgenden Jahrzehnten tatsächlich einige Fehler in der Berechnung herausgefunden hätte, so hätte das viel mehr zur Diskussion im Detail beigetragen als zu der Grundsatzdiskussion, die Anwendung der mechanischen und statischen Prinzipien abzulehnen.

Es gehört Mut und Ehrlichkeit dazu, die Spuren der erzielten Ergebnisse nicht zu verwischen, sondern so ausführlich wie notwendig darzustellen, um sie nachvollziehbar zu gestalten. Derjenige, der um das Verstehen ringt und noch nicht verstanden hat, wird diese Offenheit dankbar entgegen nehmen. Sie ihm aber mit der Begründung zu verweigern, dass das es ja *„mühelos“* herzuleiten sei und man deshalb darauf verzichten könne, kann nur als Ausrede oder als Überheblichkeit gebrandmarkt werden.

Es gibt nichts schädlicheres, als den nachfolgenden Generationen die Nachvollziehbarkeit zu verweigern. Natürlich gibt es immer unterschiedliche Grade der Nachvollziehbarkeit, wie man schon vorstehend an der Diskussion um die Anzahl der Zolleinteilungen des Rheinischen Fußes sieht. Das war noch rekonstruierbar, weil es nicht so sehr viele Möglichkeiten gibt. Wenn eine Modellbildung und die Rechenbarkeit dieses Modells aber eine ganze Armada von Interpretationsmöglichkeiten (und möglicherweise auch von Interpretationsirrtümern der Altmeister) offen lässt, dann ist es mit der Rekonstruierbarkeit der erzielten Ergebnisse schlecht bestellt. Wie nachfolgend noch gezeigt wird, trifft eben das im vorliegenden Fall zu.

Dabei ist natürlich nicht auszuschließen, dass eine Interpretationsmöglichkeit übersehen wurde, die nur durch angepasste Veränderung der zahlreichen Variablen – sprich durch Probieren – herausgefunden werden kann, aber möglicherweise auch mit dieser Arbeit nicht herausgefunden wurde.

## 3.5 Darstellung von 2 Berechnungsvarianten: Ohne und mit Schäden (vgl. Seite XXVIII des Originaltextes)

Die dann ausgeführte Berechnung wird von den drei Mathematikern für zwei Systeme durchgeführt:

1. Einmal für ein System ohne vertikale Rissbildungen in Basis, Tambour und Strebepfeilern. Der Unterbau wird als ganzer Block aufgefasst. Der daraus errechnete Widerstand hätte nach Ansicht der drei Mathematiker gereicht, wenn die Rissbildungen nicht erfolgt wären.
2. Die andere Berechnung ist für das System durchgeführt, in dem die Strebepfeiler vom Tambour und der äußere Teil der Basis vom inneren Teil durch die vertikalen Risse getrennt sind und mit dem der damals eingetretene Zustand der Kuppel beschrieben wird.

Der Modellbildung und Berechnung beider Systeme liegen gemeinsam Überlegungen zugrunde, deren Systematik in den nachfolgenden Berechnungsschritten geordnet wurden:

3. Die vorgefundenen Rissbildungen werden als das Ergebnis von Bewegungen der Kuppelteile interpretiert, die nur dann möglich sind, wenn das Gesamtbauwerk sich sozusagen in einzelne Scheiben auflöst. Dieser Gedankenansatz ist der zentrale Ausgangspunkt und die wesentlichste Leistung der drei Mathematiker, um überhaupt zu einem rechenbaren Modell zu kommen. Der Vergleich mit einer – halben – Apfelsine ist angebracht, wobei innere und äußere Schale der Kuppel verbunden durch die innere Versteifungsrippe als eine Einheit idealisiert werden. Das ist sozusagen die Apfelsinenscheibe, so dass die Kuppelschale mit der Idealisierung nicht mehr zweischalig, sondern nur noch **einschalig** ist. Um zu einem rechenbaren *„System“* zu kommen, ist aber noch wie selbstverständlich ein weiterer Schritt notwendig: Das Standsicherheitsproblem der symmetrischen, **räumlichen** Schale wird damit zum **ebenen** also zweidimensionalen Problem, wobei der Bruchwiderstand der Ketten vorher über die Betrachtung des gezogenen Stahlringes für das ebene Problem aufbereitet wurde.
4. Für die Verdrehung und Verschiebung der einzelnen, als starr angesetzten Teile der Kuppel werden ideale, reibungsfreie Gelenke angenommen. So wird eine kinematische Kette gebildet. Die Teile der kinematischen Kette sind in den Abbildungen 2 bis 5 des Originals der „ersten Statik“ dargestellt
5. Mit dieser kinematischen Kette werden die Verhältnisse der Verschiebungswege in den Gewichtsschwerpunkt der Einzelteile als virtuelle Verschiebung errechnet. Wirkt die Verschiebung in Richtung des Gewichts, so wird das Produkt Gewicht * virtuelle Verschiebung als Belastung. Im Falle der entgegengesetzten Richtung (also entgegen der Gewichtsrichtung) wird das Produkt aus Gewicht * virtueller Verschiebung als Widerstand angesetzt.

6. Als Bezugsgröße für den Widerstand wird – vermutlich – der Punkt **H** oder der Kämpfer der Hauptkuppel in den Skizzen angenommen. Die Relationen der Wege lassen sich dann z. B. unter der Annahme berechnen, dass die Horizontalkomponente der virtuellen Bewegung in **H** mit **1** angesetzt wird.

7. Durch diese Modellbildung in einem gedachten Bruchzustand werden alle Tragsicherheitsreserven des räumlichen Systems, wie Ringzugkräfte im Mauerwerk, Reibungskräfte in den Rissen und den nicht ideal wirkenden Gelenken vernachlässigt.

Unabhängig von den vorstehenden Erläuterungen soll nur zur Klarstellung noch auf folgenden Sachverhalt hingewiesen werden:

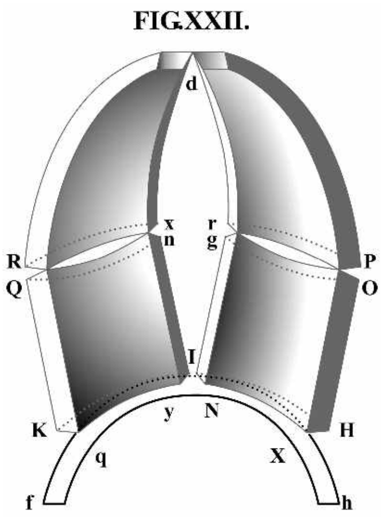


Bild 5: Idealisierung der Kuppel nach POLENI 1748

Die nebenstehende räumliche Idealisierung der Kuppel (Bild 5) als oberes und dem Tambour/Strebepfeiler als unteres Teil nach POLENI 1748 [8] wird in verschiedenen Literaturstellen meist kommentarlos gezeigt. Es ist das Apfelsinenscheibenmodell vor der Überführung von der räumlichen in die zweidimensionale Idealisierung als nächsten nicht dargestellten Schritt. Der Fehler dieser Idealisierung liegt in erster Linie darin, dass im oberen Kuppelbereich tatsächlich tangentiale Druckkräfte in den Breitenkreisen vorhanden sind und damit durchgehende Risse vom Kämpfer bis zum Scheitel nicht auftreten. Damit liegt dieses Modell bereits a priori auf der sicheren Seite bzw. liefert ansatzbedingt zu ungünstige Ergebnisse.

## 3.6 Berechnungsvariante mit Schäden (vgl. Seite XXIX des Originaltextes)

Da die Berechnungsvariante ohne Schäden nur von akademischen Wert ist, wird auf eine Darstellung im Rahmen dieses Aufsatzes verzichtet und auf [3] Teil 2 S. 10 verwiesen.

Um überhaupt einen nachvollziehbaren Ansatz für das System zu finden, wurden in der nachfolgenden Tabelle aus den im Original angegebenen numerischen Ergebnissen die virtuellen Verschiebungsgrößen rückgerechnet.

Die von den drei Mathematikern angesetzte Größe der virtuellen Verschiebung lässt sich aus dem Verhältnis des angesetzten Widerstands zur Bruchkraft der Ringe und dem Verhältnis des Widerstands bzw. der Last der Teile zu deren Gewicht ermitteln.

In dieser Variante werden noch einige „Kunstkniffe" in die Berechnung eingeführt, siehe Seite XXIX unten. Der Ansatz des gehaltenen, unteren Gelenkpunktes der kinematischen Kette an der Vorderseite des äußeren Teiles der Basis (am Punkt **A**) ergibt eine geringe Aufwärtsbewegung des Punktes **H** und damit müsste der Widerstand um einen Anteil aus der Last der Kuppel vergrößert werden. Das halten die drei Mathematiker nicht für möglich und schließen es damit aus. Eine Begründung dafür geben sie nicht an, sondern:

> *„Wir glauben, dass wir nicht weit von der Wahrheit entfernt sind..."*

Kaum noch nachzuvollziehen ist die Lage der Gelenkpunkte der kinematischen Kette für die unteren Teile. Bei einer Lage an der Kante des jeweiligen Teiles ergeben sich zu große Widerstände. Vielleicht ist der Gelenkpunkt etwas nach innen verschoben worden**?**

Ein weiterer Hinweis ist mit dem Bezug auf den Punkt **a** am unteren Fensterpfosten, der als Ursprung der Verschiebungen angesehen wird. Durch mehrfaches Probieren und Abschätzen der angesetzten Teilgewichte wurde das in der **Skizze 2** dargestellte System gefunden, mit dem sich etwa die Größe der Lasten und Widerstände erklären lässt. Wie weit es allerdings dem System der drei Mathematiker nahe kommt, wird wohl keiner nachvollziehen können.

Vollkommen unklar ist, wieso in dem zweiten System mit dem höheren Lastansatz für die kleine Kuppel, die Bruchkraft der Ringe aus dem ersten System beibehalten wurde.

Die angegebenen Teilgewichte sind über die beschriebenen Abgrenzungen wie folgt und in Anlehnung an das oben mit der Plausibilitätsprüfung angewendete einfache Näherungsverfahren ermittelt:

*äußerer Teil der Basis:*
*55 * (14 * 40 – 4 * 27 + 0,5 * 7 * 7) * 2 * ® * 119 = 19.595.322 Libre*

*Pfeileraufsatz (Säulenfuß):*
*55 * 22 * 15 * ® * 194 = 11.061.861 Libre*

*gelöster Tambour:*
*55 * (51 * 14,5 * ® * 194 – 16 * 12 * 20 * 14) = 21.831.822 Libre.*

| **Bauteil** | **Masse oder Bruchkraft in Libre** | **angesetzte Last oder Widerstand in Libre** | **Rückschluss: Größe der virtuellen Verschiebung** |
|---|---|---|---|
| kleine Kuppel | 4.081.461 | 2.961.060 | 0,7255 |
| Kuppel mit Rippen | 50.138.000 | 6.412.590 | 0,1279 |
| | **Summe der Lasten** | **ca. 9,37 Mio.** | |
| *Pfeileraufsatz / Säulenfuß ** | *11.061.861* | *867.444* | *0,0784* |
| *gelöster Tambour ** | *21.831.822* | *1.266.690* | *0,0580* |
| *Strebepfeiler ** | *13.342.081* | *574.555* | *0,0431* |
| *äußerer Teil der Basis ** | *19.595.322* | *752.686* | *0,0384* |
| *oberer Ring* | *2.116.571* | *1.278.638* | *0,6041* |
| *unterer Ring* | *1.763.809* | *1.396.280* | *0,7916* |
| | ***Summe der Widerstände*** | ***ca. 6,14 Mio.*** | |

Anmerkung: ***Widerstände*** *sind kursiv geschrieben*

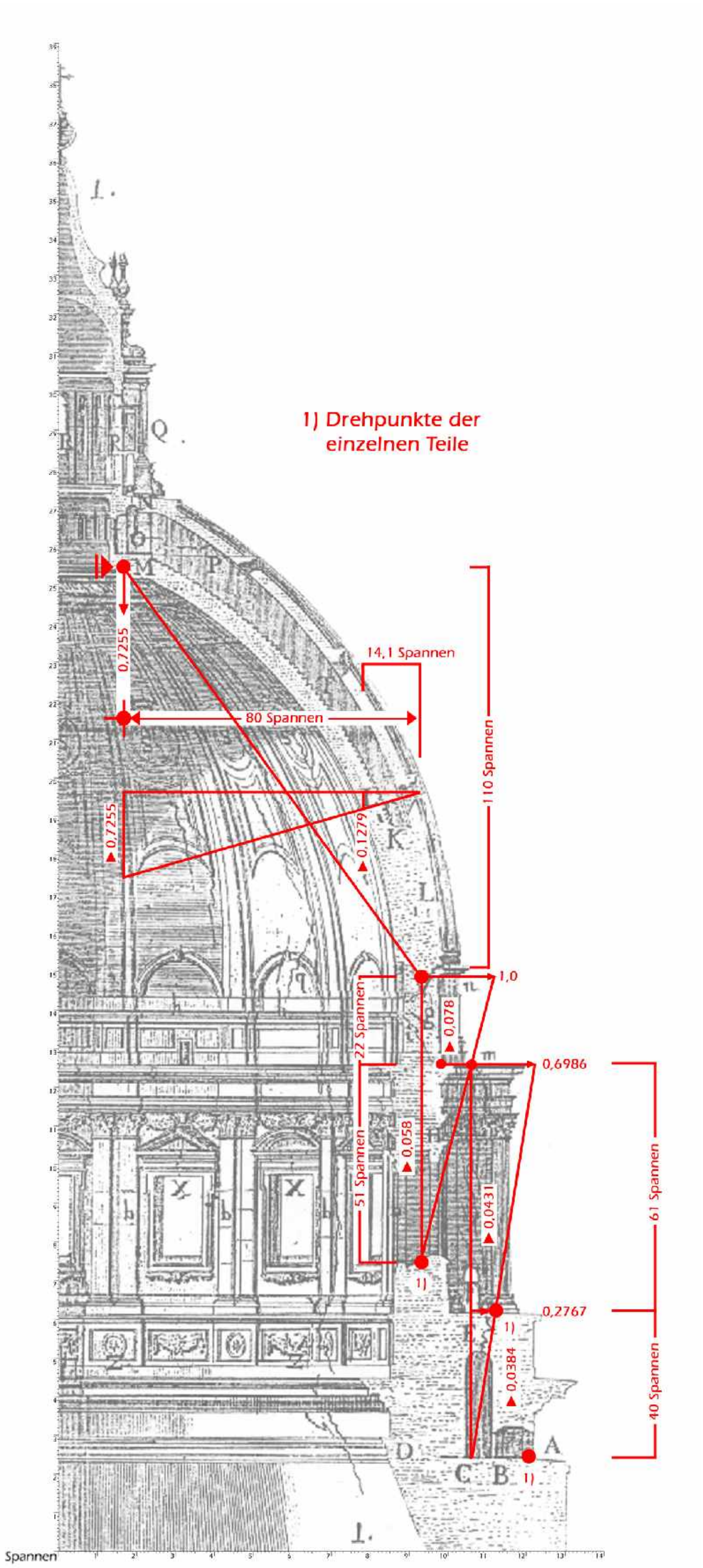


Bild 6: System mit den virtuellen Verschiebungen für die, durch Risse getrennten Teile, Säulenfuß, gelöster Tambour, Strebepfeiler und äußere Basis

Mit diesen Zahlen kann nur noch probiert werden, ob ein gewähltes System etwa diese Größe der virtuellen Verschiebungen ergibt. Wird das System 2 angesetzt, dann ergeben sich bei Randlage der Gelenkpunkte für die einzelnen Teilgewichte zu hohe Widerstände. Es erscheint deshalb möglich, dass die jeweiligen Drehpunkte nach innen geschoben wurden. Wenn für ein Rechteck die Schiefstellung und das Anheben des Schwerpunktes bekannt sind, so lässt sich der Drehpunkt berechnen. Das wurde hier getan. Danach müssten die Drehpunkte wie folgt liegen:

| | | |
|---|---|---|
| Pfeileraufsatz / Säulenfuß | 0,12 * Breite | entspricht 1,8 Spannen |
| gelöster Tambour | 0,20 * Breite | entspricht 2,8 Spannen |
| Strebepfeiler | 0,13 * Breite | entspricht 2,2 Spannen |
| äußerer Teil der Basis | 0,10 * Breite | entspricht 1,4 Spannen. |

Die Ergebnisse sind zu unterschiedlich, um dahinter eine Systematik zu erkennen.

Interessant ist die Lage des Schwerpunktes der großen Kuppel. Die Untersuchung wurde als ebenes System durchgeführt. Damit musste der Schwerpunkt unter Berücksichtigung der Massenverteilung über den Querschnitt der Kuppel berechnet werden. Die Masse ist abhängig vom Durchmesser in der jeweilige Höhe. Je weiter man sich der Kuppelspitze nähert, desto geringer wird die dem Punkt zugeordnete Masse. Damit ergibt sich ein relativ weit außen, am Kämpfer liegender Schwerpunkt.

Für eine Halbkugel liegt der so zugeordnete Flächenschwerpunkt bei R*®/4, bei einer Halbkugel mit einer Öffnung von 10° Innenwinkel liegt der so zugeordnete Flächenschwerpunkt bei 0,796*R.

Ohne die Kuppelgeometrie und deren Masseverteilung genauer zu kennen, ist deshalb der relativ weit außen angesetzte Schwerpunkt plausibel, der hier bei etwa

0,84 * R

liegt.

**Im Ergebnis der versuchten Rekonstruktion des Rechenganges der drei Mathematiker ist zu konstatieren, dass es für die *Berechnungsvariante mit Schäden* praktisch nicht genau möglich ist, diese nachzuvollziehen.**

## 3.7 Diskussion der Berechnungsergebnisse (vgl. Seite XXX des Originaltextes)

Mit der vorliegenden Untersuchung wurde versucht, das *„System“* der drei Mathematiker in ihren Ergebnissen nachzuvollziehen. Das ist nur für die *Berechnungsvariante ohne Schäden* (siehe [3] Teil 2 S. 10) gelungen, weil für die *Berechnungsvariante mit Schäden* Begründungen fehlen und die aus heutiger Sicht sinnvollen Ansätze nicht zufriedenstellende Übereinstimmungen hinsichtlich einer konsequent angewendeten Systematik ergeben (siehe Bild 6).

Akzeptiert man allerdings bereits das erkennbare Prinzip, den Drehpunkt der Bauteile nicht genau auf die Bauteilkante, sondern mehr oder weniger willkürlich in das Bauteil eingerückt zu legen, so ist die Herangehensweise der drei Mathematiker zu diesem Teilproblem tendenziell richtig. Trotz dieser richtigen Tendenz sind unter Berücksichtigung der einfach aus der *Berechnungsvariante ohne Schäden* übernommenen Kettenkräfte, sowie dem einfachen Weglassen des günstig wirkenden

Einflusses der großen Kuppel auf der Widerstandsseite so viele wesentliche Ansatzkonflikte vorhanden, dass man das Ergebnis in diesem Sinne weder im Rahmen der Modellbildung und erst recht nicht gemessen an dem Maßstab der Wirklichkeitsnähe als richtig werten kann.

Um es noch einmal ganz klar herauszustellen:

Die statische Berechnung erfolgt immer in 2 wesentlichen Schritten:

> Erstens in einer Modellbildung, die die Tragkonstruktion für den Statiker überhaupt erst rechenbar macht und immer eine mehr oder weniger gute Abbildung der Wirklichkeit darstellt.
>
> Zum zweiten werden an diesem Modell Annahmen getroffen, die die Belastung und die Belastbarkeit der Wirklichkeit nachbilden.

Im vorliegenden Fall wurden von den drei Mathematikern bereits mit dem „Apfelsinenscheibenmodell“ zur Erzielung einer Rechenbarkeit bereits derart große Abweichungen von der Wirklichkeit eingeführt, dass es aus heutiger Sicht nicht einmal zur Plausibilitätskontrolle taugt. Die Art der Berechnung aus heutiger Sicht anwenden zu wollen, ist schlichtweg falsch. Kuppeln sind räumliche Tragwerke und müssen auch als solche behandelt werden. Das bestreiten zu wollen ist ungefähr damit vergleichbar, wenn man die Berechnung von Platten grundsätzlich auf den Einfeldträger zurückführen wollte. In einigen Fällen kann das zwar sogar sinnvoll sein und mit entsprechendem Aufwand sind solche Maßstabsbildungen auch möglich, jedoch sind das immer Hilfsmittel, die sozusagen fallweise Korrekturansätze verlangen. Diese Korrekturen konnten von den drei Mathematikern nicht vorgenommen werden, weil sich das Tragwerk mit den Kenntnisstand des Jahres 1742 nicht wirklichkeitsnäher abbilden ließ.

Im Rahmen dieses „Apfelsinenscheibenmodells“ wurden dann für die Widerstandsseite Annahmen getroffen, die zweifelsfrei zu ungünstig sind, wodurch das sehr auf der sicheren Seite liegende „Apfelsinenscheibenmodell“ tendenziell in Richtung Unterschätzung der Widerstandsseite verstärkt wurde. Damit wurde bereits mit der „ersten Statik“ der den Tragwerksplanern anhaftende Mythos des „Kaputtrechners“ oder des „10-fach Überdimensionierers“ begründet. Man muss deshalb auch leider konstatieren, dass die Berechnungsergebnisse selbst im Rahmen der Modellbildung wesentlich zu ungünstig sind und natürlich erst recht gemessen an der Wirklichkeit.

Es erübrigt sich deshalb auch die weitere Diskussion zur Kritik, dass bei dem festgestellten Standsicherheitsdefizit die Konstruktion schon längst eingestürzt sein müsste. Auch heute noch und sehr häufig bei Sanierungen entziehen sich diverse Konstruktionen einer wirklichkeitsnahen Tragwerksanalyse, weil wir auch heute noch nicht in der Lage sind, ohne erhebliche Eingriffe am Tragwerk die für die Tragwerksanalyse erforderlichen Geometrie- und Festigkeitsparameter zu erkunden. Dabei spielen Aufwands- und Nutzensüberlegungen die entscheidende Rolle. Auch in diesen Fällen kann es durchaus zu solchen Ergebnissen der Tragwerksanalyse kommen, dass im Rahmen der Annahmen erhebliche Standsicherheitsdefizite festgestellt werden müssen. Es ist dann die Aufgabe der Tragwerksplaner, Modell- und Annahmefehler zu diskutieren und hinsichtlich ihres Einflusses auf die Standsicherheitsbetrachtungen zu bewerten.

**Es ist einzuschätzen, dass die drei Mathematiker diese Diskussion für ihr gewähltes Modell nicht führen konnten, weil sie an die ingenieurtheoretische Grenze stießen. Anders dagegen bei ihren Annahmen zu Widerstand und**

**Belastung des Modells. Hier haben sie eine Parameterdiskussion, trotz des alarmierenden Ergebnisses, unterlassen. Gepaart mit solch selbstbewusst-optimistischen Bemerkungen, dass man glaube, *„nicht weit von der Wahrheit entfernt“* zu sein, liegt darin der größte Mangel der ersten statischen Berechnung.**

# 4 Zusammenfassung (vgl. Seite XXXVI des Originaltextes)

Die Schäden und die erfolgten Bewegungen wurden von den drei Mathematikern gut erkannt und beschrieben. Die Verstärkungen jedoch nicht konsequent in dem Bereich der Schadensursache angeordnet, weil hier offenbar der Zusammenhang von Ursache und Wirkung nicht erkannt werden konnte, das Wissen fehlte noch. Deshalb sind Verstärkungen auch in den Bereichen von Folgeschäden vorgeschlagen worden, obwohl sie damit zum großen Teil unwirksam sind.

Der Versuch, die Berechnung nachzuvollziehen, soll nicht ohne Wertung abgeschlossen werden.

Die drei Mathematiker waren Anwender der damals bekannten mechanischen Prinzipien. Für ein Bauwerk mit deutlichen Schäden sollten Ursachen dafür gefunden und Maßnahmen vorgeschlagen werden, um einen Einsturz des Bauwerkes zu verhindern.

Es wurde ein System gesucht und gefunden, mit dem man glaubte, die Schäden erklären und Maßnahmen zur Erhaltung der Kuppel errechnen zu können.

Das Hooke’sche Gesetz über die Proportionalität von Spannungen und Dehnungen war noch nicht bekannt. Der Widerstand der Eisenringe wurde deshalb nicht in Abhängigkeit von deren wirklicher Dehnung, sondern mit der Größe deren Bruchkraft, abgemindert mit einer virtuellen Verschiebung in Höhe der Ringlage, angesetzt.

Das ist mit dem heutigen Kenntnisstand über elastisch- plastisches Materialverhalten ein grundlegender Fehler in den Voraussetzungen des gewählten Systems.

Wird für die Eisenringe, nur als Gedankenmodell aus heutiger Sicht, bis etwa 80 % der Bruchfestigkeit ein angenähert linear verlaufender E – Modul von ca. 180.000 N/mm² angenommen, so ergibt das eine Dehnung von rund 1,7 ‰ . Bei 190 Spannen Durchmesser der Ringe ist eine Dehnung von 0,0017 * 190 * ® = 1,01 Spanne ≈ 12 Onzen notwendig, um die angesetzte Größe zu realisieren. Unter Nummer 32 der von den drei Mathematikern aufgezählten Schäden (siehe Seite IX des Originaltextes) werden die Risse mit einer Summe von 22 bis 24 Onzen angegeben. Sollte das die Dehnung in Höhe der Eisenringe sein, dann wäre deren Fließgrenze erreicht und die Kräfte der Eisenringe etwa in der gedachten Größe aktiviert gewesen. Man muss aber auch beachten, dass ein Schlupf in den Kettengliedern aufgetreten sein wird, bevor das Eisen bis zur Fließgrenze gedehnt wird. Der grundlegende Fehler des Ansatzes ist in der Bedeutung damit abgeschwächt.

Wie bei der Anwendung des Hebelgesetzes die Festigkeit und Unzerstörbarkeit des Hebels vorausgesetzt wird, spielen in den Überlegungen zum Kräftegleichgewicht nur die geometrischen Abhängigkeiten der Bauteile eine Rolle, nicht jedoch deren innerer Belastungszustand und Festigkeit.

Für Gebilde aus starren Körpern, die sich um definierte Gelenkpunkte drehen, ist zur Berechnung der Kippsicherheit (Standsicherheit) die gewählte Vorgehensweise mit virtuellen Verschiebungen möglich, wenn keine elastische Größe eingeführt wird, die nur bei realen Verschiebungen geweckt wird. Es werden Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt, ohne Verträglichkeitsbedingungen zu berücksichtigen. Eine Herangehensweise, die heutzutage bei Untersuchungen im Bruchzustand angewendet wird.

Die Stützlinientheorie des Gewölbes als ebenes Problem war in den Anfängen von PHILIP DE LA HIRE entwickelt worden und ist auch mit dem Hinweis in der „ersten Statik“ aufgeführt, dass bei der Kuppel ein anderes System wirken muss, weil das Rissbild der Kuppel nicht mit dem Rissbild eines Gewölbes zu vergleichen ist. Bei der Kuppel fehlten die Horizontalrisse.

Die zweite Tragrichtung der räumlich gekrümmten, rotationssymmetrischen Kuppel, bei der auch auf den Breitenkreisen Kräfte entstehen, wird erst Ende des 19. Jahrhunderts erkannt.

Die Berechnung oder deren Ergebnis als richtig oder falsch zu werten, selbst unter der Maßgabe, das damalige Wissen als Grundlage anzusehen, geht an der Bedeutung der ersten Statik vorbei, da nicht nur das Noch-Nicht-Wissen in der Wertung zu berücksichtigen ist, sondern auch die zurückgehaltenen Informationen als nicht zu tolerierende Geheimniskrämerei und damit auch nicht offen gelegte Begründungen für die getroffenen Widerstandsannahmen.

Die wesentlichste Bedeutung der „ersten Statik“ besteht darin, dass erstmals der Versuch gemacht wurde, sichtbare Schäden und Verformungen an einem Bauwerk mit Prinzipien der Mechanik zu erklären und mathematisch zu begründen.

Der wesentlichste Mangel der „ersten Statik“ besteht nicht in erster Linie in seinem von der Wirklichkeit des Jahres 1742 abweichenden numerischem Kalkül, sondern in einer nicht vorgenommenen Parameterdiskussion für die Widerstandsseite. Hier war Schweigen nicht Gold, sondern Silber.

# 5 Ausblick

Für diejenigen, die enttäuscht sind, dass sie keine gewaltige Computerrechnung vorgefunden haben, die sozusagen als Meilenstein der Wahrheit zur Vergleichbasis gekürt werden kann, soll darauf hingewiesen werden, dass in Afrika, in der 2 ½-Millionen-Stadt *Abidjan*, *Côte d’Ivoire* (früher Elfenbeinküste), der Petersdom 1:1 nachgebaut und im Jahre 1990 von Papst Johannes Paul II. unter dem Namen *„Notre Dame de la Paix“* geweiht wurde. Natürlich sind dazu Planungen und diverse Recherchen notwendig. Es ist sicher anzunehmen, dass man in Rom darüber Bescheid weiß. Dort könnte man also zuerst ansetzen. Wir haben das nicht weiter recherchiert, denn uns hat in erster Linie die „erste Statik“ und erst in zweiter Linie die Kuppel des Petersdomes interessiert.

**Literatur**


[1] Boscovich, R.G. ; Le Seur, T. ; Jacquier, F. : Parare di tre mattematici sopra i danni, che si sono trovati nella Cupola di S.Pietro sul fine dell'Anno 1742. Dato per ordine di nostro Signore Papa Benedetto XIV. Rom, 1743, 36 S., 1 Skizze; (In der ersten Statik [1] wurde die Schreibweise *„Boscovich"* verwendet, wogegen man bei der Internetsuche ausschließlich mit der Schreibweise „*Boskovic*" fündig wird (z.B. „Institut Ruder Bošković" in Zagreb).)

[2] Straub, H.: Die Geschichte der Bauingenieurkunst. Ein Überblick von der Antike bis in die Neuzeit. 4., überarb. und erw. Auflage, Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser-Verlag, 1992

[3] Wapenhans, W.; Richter, J.: Die erste Statik der Welt von 1742 zur Peterskuppel in Rom – Originaltext – Übersetzung – Kommentar, Selbstverlag, Dresden, 2001, 106 S. (siehe vollständige Fassung: www.wundr.com Rubrik: Infos ⇒ Fachaufsätze ⇒ Erste Statik)

[4] Conrad, D.; Hänseroth, T.: Die „Geburtsstunde des modernen Bauingenieurwesens" vor 250 Jahren und ihre Vorgeschichte. Bautechnik 70 (1993), Heft 3 S.176-180

[5] Greiner-Mai, D.: „Die erste Statik der Welt". Bautechnik 78 (2001), Heft 9 S. 680 (Rezension zu [3])

[6] Szabo, I.: Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen. 3., korrigierte und erweiterte Auflage, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1996, 571 S.

[7] Ramm, W.: Über die Geschichte des Eisenbaus und das Entstehen des Konstruktiven Ingenieurbaus. Stahlbau 70 (2001), Heft 9, S. 628-641.

[8] Poleni, G.: Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano. 1748


**Autoren dieses Beitrages:**


Dr.-Ing. Wilfried Wapenhans, öffentlich bestellter und vereidigter Sachverständiger für Stahlhochbau, Stahlbetonbau und Mauerwerksbau, Wapenhans und Richter, Räcknitzhöhe 35, 01217 Dresden

Dipl.-Ing. Jens Richter, Prüfingenieur für Baustatik Fachrichtung Massivbau, Wapenhans und Richter, Räcknitzhöhe 35, 01217 Dresden